

De TI-83: Kansverdelingen

Met de TI-83 kun je in verschillende standaardsituaties kansen berekenen. In dit practicum komen de binomiale kansverdeling en de normale kansverdeling aan bod. Kijk eerst in je wiskundeboek of je met deze kansverdelingen kunt werken. Je moet voordat je met dit practicum kunt werken bekend zijn met de basistechnieken van de TI-83 en met het werken met functies op de TI-83. Als dat niet het geval is moet je eerst de bijpassende practica doen.

Loop ook eerst het practicum: ‘Simulaties en telsystemen’ door.

Inhoud:

1. De binomiale kansverdeling
2. Grenswaarden bij binomiale toetsen
3. Kanshistogrammen, verwachting en standaarddeviatie
4. De normale kansverdeling
5. Grenswaarden bij normale toetsen

1. De binomiale kansverdeling

Stel je voor dat je 100 keer hetzelfde kansexperiment uitvoert waarbij de kans op succes 0,23 en dus de kans op mislukking $1 - 0,23 = 0,77$ is.

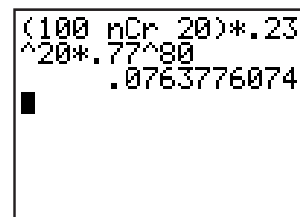
De toevalsvariabele X stelt het aantal keren succes bij die 100 trekkingen voor. X heeft dan een **binomiale kansverdeling** met:

$$P(X = k) = \binom{100}{k} \cdot (0,23)^k \cdot (0,77)^{100-k}$$

Hierin is: $\binom{100}{k} = \frac{100!}{k!(100-k)!}$ wat er op je TI-83 uit ziet als: 100 nCr k.

De kans op $X = 20$ is dan gewoon in je rekenvenster te bepalen door te tikken:

- ▷ $($ 100 $\boxed{\text{MATH}}$ ga naar PRB en kies 3: nCr en $\boxed{\text{ENTER}}$
- ▷ vervolg met $\boxed{)}$ $\boxed{\times}$.23 $\boxed{\wedge}$ 20 $\boxed{\times}$.77 $\boxed{\wedge}$ 80 en $\boxed{\text{ENTER}}$



```
(100 nCr 20)*.23
^20*.77^80
.0763776074
```

Het antwoord zie je in het TI-venster hiernaast.

Dit kan echter gemakkelijker. De TI-83 beschikt over de functie 'binompdf' (binomial probability distribution function) waarmee kansen zoals die hierboven rechtstreeks zijn te berekenen:

```
binompdf(100,.23
,20)
.0763776074
```

- ▷ toets **2nd** **VARS**, je hebt dan het DISTR-menu (distribution = verdeling)
- ▷ kies 0: binompdf(en **ENTER** (als je niet de pijltjes-toetsen gebruikt maar alleen 0 toetst is **ENTER** overbodig)
- ▷ tik nu: 100 **,** .23 **,** 20 **)** en **ENTER**

Je vindt dezelfde kans als hierboven.

De complete kansverdeling is eenvoudig te maken door de binomiale kans met een variabele X in het $Y=$ scherm als functie in te voeren en dan een tabel met stapgrootte 1 bij die functie te maken. In de twee figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet.

De hierboven gevonden waarde voor $X = 20$ vind je in de tabel terug.

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=binompdf(100
,.23,X)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

X	Y1	
16	.02409	
17	.03556	
18	.04898	
19	.06314	
20	.07638	
21	.08691	
22	.09322	
X=20		

Binomiale kansen

Als een variabele X binomiaal is verdeeld met $n = 60$ en $p = 0,23$ dan kun je de volgende binomiale kansen berekenen met de TI83:

- ▷ $P(X = 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,0763 \dots$
 - ▷ eerst: **2nd** **VARS** om naar het menu DISTR (distributions = verdelingen) te komen
 - ▷ kies 0: binompdf((en eventueel **ENTER**)
 - ▷ toets 100 **,** 0.23 **,** 20 **)** **ENTER**
- ▷ $P(X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2810 \dots$
 - ▷ **2nd** **VARS** en kies (met de pijltjestoetsen) A: binomcdf(en **ENTER**
 - ▷ toets 100 **,** 0.23 **,** 20 **)** en **ENTER**

- ▷ $P(X < 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = P(X \leq 19 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,2046\dots$
 - ▷ $\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{VARS}}$ en kies (met de pijltjestoetsen) A: binomcdf(en $\boxed{\text{ENTER}}$
 - ▷ toets 100 $\boxed{,}$ 0.23 $\boxed{,}$ 19 $\boxed{)}$ en $\boxed{\text{ENTER}}$
- ▷ $P(X > 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 1 - P(X \leq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7189\dots$
 - ▷ toets 1 $\boxed{-}$ $\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{VARS}}$ en kies A: binomcdf(en $\boxed{\text{ENTER}}$
 - ▷ toets daarna 100 $\boxed{,}$ 0.23 $\boxed{,}$ 20 $\boxed{)}$ en $\boxed{\text{ENTER}}$
- ▷ $P(X \geq 20 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 1 - P(X \leq 19 | n = 100 \text{ en } p = 0,23) = 0,7953\dots$
 - ▷ toets 1 $\boxed{-}$ $\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{VARS}}$ en kies A: binomcdf(en $\boxed{\text{ENTER}}$
 - ▷ en daarna 100 $\boxed{,}$ 0.23 $\boxed{,}$ 19 $\boxed{)}$ en $\boxed{\text{ENTER}}$

2. Grenswaarden bij binomiale toetsen

Vooraf bij het **toetsen van hypothesen** wil je grenswaarden opzoeken bij binomiale kansverdelingen. Het gaat dan om problemen als dit:

Bepaal de waarde van g waarvoor:

$$P(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0,23) < 0,10$$

Je moet daarvoor zelf een kansverdeling maken voor de binomiale toevalsvariabele X met $n = 100$ en $p = 0,23$. Dat doe je door deze kansverdeling in te voeren als functie in het Y= scherm en dan de tabel van die functie (stapgrootte 1) in beeld te brengen. In de twee figuren hieronder zie je hoe dat er uit ziet. De gezochte grenswaarde is kennelijk $g = 14$.

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=binompdf(100
, .23,X)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=

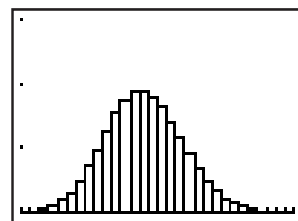
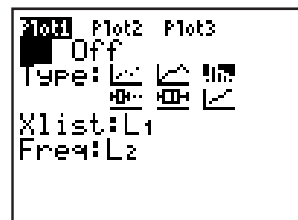
```

X	Y1	
11	.00107	
12	.00236	
13	.00478	
14	.00887	
15	.01518	
16	.02409	
17	.03556	
X=14		

3. Kanshistogrammen, verwachting en standaarddeviatie

Bij een binomiale kansverdeling kun je een **kanshistogram** maken. Je laat dan de grafische rekenmachine een lijst met kansen maken. Stel bijvoorbeeld dat je een kanshistogram wilt maken bij een binomiale verdeling met $n = 100$ en $p = 0,23$. Dat kun je zo doen:

- ▷ Toets **[STAT]** en kies 1: Edit
Je ziet nu een aantal lijsten L1, L2, enzovoorts.
- ▷ Voer in L1 de waarden voor de stochast $X = 0, 1, 2, \dots, 100$ in door de cursor op L1 te zetten en **[ENTER]** te toetsen.
Onderaan zie je nu L1= met daarachter de cursor.
- ▷ Ga naar **[2nd]** **[STAT]** **[OPS]** en kies 5: seq en **[ENTER]**.
Je ziet nu: L1=seq(met daarachter de cursor.
- ▷ Zet daar in: X **[,]** X **[,]** 0 **[,]** 100 **)]** en toets **[ENTER]**.
In L1 staan nu de getallen 0 t/m 100. Ga dat na door met de pijltjes toetsen door de lijst te lopen.
- ▷ Voer in L2 de kansen in door de cursor op L2 te zetten en **[ENTER]** te toetsen.
Onderaan zie je nu L2= met daarachter de cursor.
Ga naar **[2nd]** **[STAT]** **[OPS]** en kies 5: seq en **[ENTER]**. Je ziet nu: L2=seq(met daarachter de cursor.
- ▷ Ga naar: **[2nd]** **[VARS]** en kies 0: binompdf en toets **[ENTER]**.
Je ziet nu: L2=seq(binompdf(met daarachter de cursor.
- ▷ Vul in: 100, 0.23, X **)]** **[,]** X **[,]** 0 **[,]** 100 **)]** en toets **[ENTER]**. Nu staan in L2 de bijbehorende kansen.
Controleer dat.
- ▷ Nu je de lijsten L1 en L2 hebt ingevoerd, kun je diagrammen maken met behulp van STAT PLOT.
Je bereikt dat met: **[2nd]** **[Y=]**. Je krijgt dan de figuur hiernaast.
- ▷ Kies je voor 1: Plot1 en **[ENTER]**, dan kun je het eerste diagram instellen, je ziet dan de tweede figuur hiernaast.
- ▷ Kies voor On **[ENTER]** en loop met de pijltjestoetsen naar en door Type. Kies het type plaatje, controleer of Xlist op L1 en Freq op L2 staat ingesteld.
Indien dat niet het geval is, zorg daar dan voor (Je vindt L1, L2, enzovoorts op de cijfertoetsen via **[2nd]**). Door **[GRAPH]** te toetsen zou het gekozen diagram in beeld moeten komen, afhankelijk van de scherminstellingen. Omdat er alleen voor X van 10 t/m 40 kansen zijn te vinden die in beeld zijn te brengen, stel je voor X ook die waarden in. De uitkomsten liggen dan tussen 0 en 0,15.



Oefen jezelf door zo een paar kanshistogrammen bij de binomiale verdeling te maken. Zoek voorbeelden in je wiskundeboek. Een cumulatieve kanshistogram gaat ook prima.

Centrum en spreiding van een kanshistogram

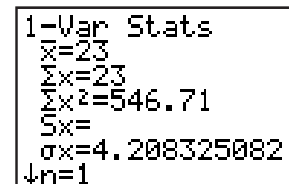
Als je een kansverdeling als lijst in de TI-83 hebt ingevoerd, dan kun je eenvoudig een maat voor het centrum van de verdeling en een maat voor de spreiding van de verdeling vinden.

- ▷ De gebruikte centrummaat voor de kansverdeling van X is de **verwachting**, aangegeven met \bar{X} .
- ▷ De gebruikte spreidingsmaat heet de standaardafwijking of **standaarddeviatie**, aangegeven met σ_X .

Om deze centrum- en spreidingsmaten in één keer in beeld te krijgen, ga je zo te werk:

- ▷ Toets **[STAT]**, kies CALC en dan 1: 1-Var Stats
- ▷ Toets daar achter de namen (bijvoorbeeld L1 en L2) van de twee lijsten die je in gebruik hebt voor je gegevens.
Eerst de lijst (L1) waarnemingsgetallen, dan na **[,]** de lijst (L2) met kansen (relatieve frequenties)
- ▷ In je scherm staat nu: 1-Var Stats L1, L2.
Toets **[ENTER]** en je krijgt de juiste waarden.

Doe dit met de binomiale kansverdeling uit de voorgaande tekst. In het plaatje zie je het eindresultaat. De verwachting is dus 8 en de standaarddeviatie is ongeveer 2,19.



```
1-Var Stats
x=23
Σx=23
Σx²=546.71
Sx=
σx=4.208325082
↓n=1
```

4. De normale kansverdeling

Als een toevalsvariabele X normaal is verdeeld met een gemiddelde van 100 en een standaardafwijking van 6, dan kun je de volgende kansen berekenen met de TI-83:

- ▷ $P(95 < X < 102 \mid \bar{X} = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,4282 \dots$
 - ▷ toets $\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{VAR}} \boxed{\text{DISTR}}$ om naar het menu DISTR (distributions = verdelingen) te komen
 - ▷ kies dan 2: normalcdf(en toets: $95 \boxed{,} 102 \boxed{,} 100 \boxed{,} 6 \boxed{)}$ en $\boxed{\text{ENTER}}$
- ▷ $P(X < 95 \mid \bar{X} = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,2023 \dots$
 - ▷ toets $\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{VAR}} \boxed{\text{DISTR}}$ en kies 2: normalcdf(
 - ▷ toets $\boxed{(-)} \boxed{1000} \boxed{,} 96 \boxed{,} 100 \boxed{,} 6 \boxed{)}$ en $\boxed{\text{ENTER}}$
- ▷ $P(X < 95 \mid \bar{X} = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,7976 \dots$
 - ▷ toets $\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{VAR}} \boxed{\text{DISTR}}$ kies 2: normalcdf(
 - ▷ toets $96 \boxed{,} 1000 \boxed{,} 100 \boxed{,} 6 \boxed{)}$ en $\boxed{\text{ENTER}}$

Loop al deze berekeningen zelf na!

Cumulatieve normale verdeling in beeld

Als je met kansen te maken hebt bij een normale verdeling, dan werk je altijd met normalcdf.

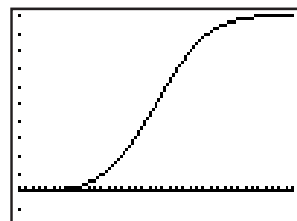
Je kunt in het Y= scherm de *cumulatieve* normale verdeling normalcdf invoeren. En dat is handig bij het bepalen van kansen en bij het terugrekenen vanuit een gegeven kans.

Stel je voor dat je de volgende kans wilt berekenen:

$$P(X < 102 \mid \bar{X} = 100 \text{ en } \sigma_X = 6)$$

Je voorziet eerst je grafiekenscherm van de goede instellingen, bijvoorbeeld X laat je tussen 80 en 120 lopen en Y (dat zijn de kansen bij de cumulatieve normaalkromme) tussen $-0,1$ en 1 . Zorg dat er geen functies meer zijn ingevoerd, anders krijg je daarvan misschien ook nog de grafieken in beeld. Vervolgens toets je:

- ▷ $\boxed{\text{Y=}}$ om het invoerscherm te openen;
- ▷ $\boxed{2\text{nd}} \boxed{\text{VAR}} \boxed{\text{DISTR}}$ en je kiest 2: normalcdf($\boxed{\text{ENTER}}$
- ▷ in het Y= scherm zet je: normalcdf(0,X,100,6) en $\boxed{\text{ENTER}}$



De figuur hiernaast komt dan in beeld.

Toets je nu $\boxed{\text{TRACE}}$ dan kun je met de cursor over de grafiek lopen en kansen bepalen. Dat is echter nogal grof.

Via het Calc-menu en Value kun je echter de gevraagde kans bepalen: $0,6305 \dots$

Op deze manier kun je ook gemakkelijk terugrekenen.

Stel je voor dat je g wilt berekenen als:

$$P(X < g | \bar{X} = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,6$$

Je voert dan voor Y1 de cumulatieve normaalkromme in (net als hiervoor) en voor Y2 de bekende kans. Met behulp van Intersect vind je eenvoudig dat $g = 101,52 \dots$

Verder kun je gemakkelijk σ_X bepalen als bijvoorbeeld:

$$P(X < 102 | \bar{X} = 100 \text{ en } \sigma_X = ?) = 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- ▷ Voer in Y1 = binomcdf(0,102,100,X) en Y2 = .6
- ▷ Stel het venster zo in dat X (dat is nu de standaarddeviatie!) loopt van 0 tot zeg 20 en Y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- ▷ Met Intersect vind je nu: $\sigma_X = 7,8943 \dots$

En tenslotte kun je gemakkelijk \bar{X} bepalen als bijvoorbeeld:

$$P(X < 102 | \bar{X} = ? \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,6$$

Je gaat dan zo te werk:

- ▷ Voer in Y1 = binomcdf(0,102,X,6) en Y2 = .6
- ▷ Stel het venster zo in dat X (dat is nu het gemiddelde!) loopt van 80 tot 120 en Y loopt van 0 tot 1 (cumulatieve kansen).
- ▷ Met Intersect vind je nu: $\bar{X} = 100,4799 \dots$

Grenswaarden bij normale kansverdelingen

Voor het terugrekenen vanuit gegeven kansen bij de normale verdeling heeft de TI-83 een afzonderlijke functie. Stel je wilt bij een normaal verdeelde variabele X bij een gegeven kans de bijbehorende grenswaarde g voor X terugzoeken. Dat gaat dan zo:

- ▷ $P(X < g | \bar{X} = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,2023$ geeft: $g \approx 95$
 - ▷ toets `2nd` `VAR` en kies 3: invNorm(
 - ▷ toets `0.2023` `,` `100` `,` `6` `)` `ENTER`
- ▷ $P(X > g | \bar{X} = 100 \text{ en } \sigma_X = 6) = 0,2023$ geeft: $g \approx 105$
 Omdat $P(X > g) = 1 - P(X < g)$, is nu: $P(X < g) = 1 - 0,2023 = 0,7977$.
 Daarom:
 - ▷ toets `2nd` `VAR` en kies 3: invNorm(
 - ▷ toets `0.7977` `,` `100` `,` `6` `)` `ENTER`

Loop ook deze berekeningen zorgvuldig na!

